Asociación Mexicana de Inversionistas

Matemáticas Financieras

Anualidades

POR: Fernando J. Martínez Eissa
Académico

Series y Convergencia

Sucesiones Geométricas

Una sucesión geométrica, es una secuencia de números llamados términos en la cual cada término se puede obtener del término inmediato anterior, multiplicándolo por un número fijo denominado tasa, por ejemplo:

1. 4,-8,16,-32,64,-128,256,-512. La tasa (r) es: -2
2. 729,486,324,216,144,96,64 r=2/3

Si se busca construir una serie geométrica de 9 términos considerando "a" como el primer término y a "r" como su tasa de crecimiento, tenemos:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, ar^7, ar^8$$

De lo anterior se puede observar que para una serie de "n" términos, el último término de la serie se puede calcular como:

$$u = ar^{(n-1)} \qquad (i)$$

Sucesiones Geométricas

Sea s la suma de siguiente serie geométrica:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots,\ ar^{n-1}$$

Entonces,

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando por "r", se obtiene:

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n \qquad (2)$$

Restando (2) a (1)

$$s - rs = a + (ar - ar) + \left(ar^2 - ar^2\right) + \ldots + \left(ar^{n-1} - ar^{n-1}\right) - ar^n$$

$$s(1-r) = a - ar^n \Rightarrow s = \frac{a - ar^n}{(1-r)} \qquad (3)$$

Será conveniente utilizar (3) cuando r<1 y

$$s = \frac{ar^n - a}{(r-1)} \qquad (3')$$

cuando r>1.

Sucesiones Geométricas

A partir de (i), se tiene: $ru = ar^n$

Entonces (3) y (3') se pueden reexpresar como:

$$s = \frac{a - ru}{1 - r} \quad si\ r < 0 \quad y \quad s = \frac{ru - a}{r - 1} \quad si\ r > 0$$

Ejemplo 1

Encontrar el 10mo. término y la suma de los primeros 10 términos de la sucesión geométrica 4, 8, 16, 32,...

Solución

Para obtener el 10mo. término:

$$u = ar^{n-1} \Rightarrow u = 4 \cdot 2^9 = \boxed{2{,}048}$$

La suma de los primeros 10 términos será

$$s = \frac{2 \cdot (2{,}048) - 4}{2 - 1} = \boxed{4{,}092}$$

Sucesiones Geométricas Infinitas

Considere la siguiente serie geométrica:

1, 1/4, 1/16, 1/64, 1/256…

Donde a=1 y r=1/4. La suma de los primeros n términos es:

$$s = \frac{1-(1/4)^n}{1-(1/4)}$$

$$s = \frac{1}{1-(1/4)} - \frac{(1/4)^n}{1-(1/4)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

De lo anterior se puede observar que $s<4/3$, ya que conforme se incrementa el valor de n la suma tiende a 4/3.

En general, La suma s para la serie a, ar, ar^2, … se aproxima a $a/(1-r)$ conforme n crece *i.e.*

$$s = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 2

Encontrar la suma de la siguiente serie geométrica:

1, 1/2,1/4, 1/8, ...

Solución

Tenemos: a=1; r=1/2

$$s=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-1/2}=\boxed{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar la suma de la siguiente serie geométrica:

1, -1/4,1/16, -1/64, ...

Solución

Tenemos: a=1; r=-1/4

$$s=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1+1/4}=\boxed{\frac{4}{5}}$$

Anualidades - Intro

Anualidades

Definición

Corresponde a una serie de flujos de efectivo con pagos periódicos, generalmente iguales a lo largo de un periodo de tiempo.

Clasificación

Cierta: Cuando se fijan de forma anticipada el número de pagos, el monto de los mismos y el tiempo al que se realizarán.

Contingente o aleatoria: Cuando el número, monto o tiempo al que se realicen los pagos dependa de la ocurrencia o no de un evento.

Constante: Si el monto de los pagos es igual. Se llama *ordinaria* si todos los pagos son iguales a 1.

Variable: Si el monto de los pagos es variable

Temporal: Si el número de pagos es finito.

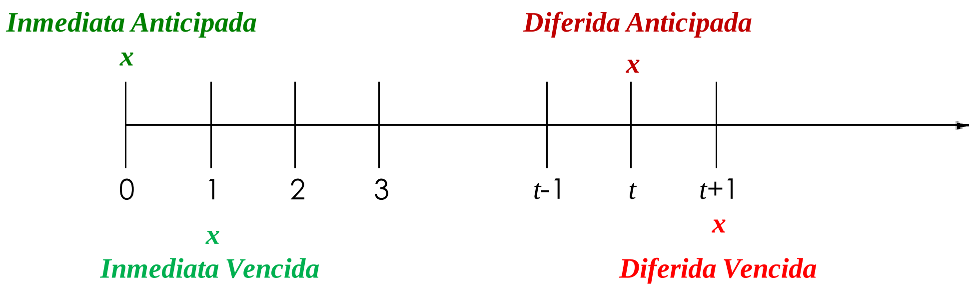
Perpetuidad: Si el número de pagos no es finito.

Anualidades Inmediatas y Diferidas

Se dice que una anualidad es *inmediata* si el primer pago se realiza al principio del primer periodo y será ***diferida*** "t" periodos si el primer pago se realiza al principio del periodo $t+1$.

La anualidad es *anticipada* si los pagos se realizan al principio de cada periodo de pago y es *vencida* si se realizan al final de cada periodo de pago.

Si x representa el primer pago de la anualidad, gráficamente las anualidades explicadas en los párrafos anteriores se verán:



Notación

Los diéresis indican que es anticipada, si no los lleva es vencida. Si es continua lleva una línea.

$${}_{t|}\ddot{a}_{\overline{n|}\,i}$$

Unidades de tiempo diferidas, se omite si es inmediata.

Se usa a si es valor presente y s si es valor futuro.

Tasa de interés efectiva anual.

Duración en años de la anualidad. Si es perpetuidad se indica con el símbolo de infinito.

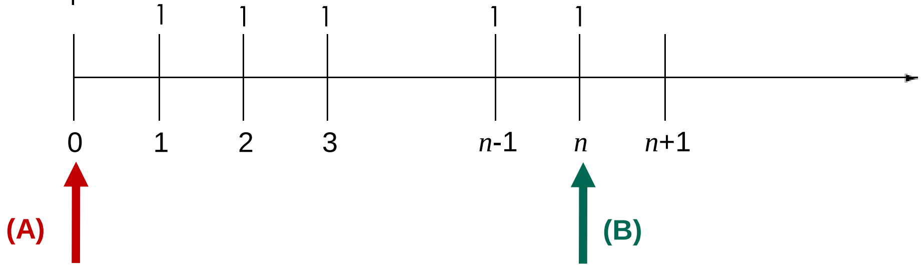
Así mismo, se define $v = \dfrac{1}{1+i}$ como el valor presente de una unidad monetaria en un año.

usaremos VA(i,n,-1,,**0**) VF(i,n,-1,,**0**)

Anualidades Básicas

Anualidad Vencida

Considere una anualidad en los cuales se realizan pagos de \$1 al final de cada periodo durante "n" periodos.



El valor presente de esta anualidad valuado en (A), se denota $a_{\overline{n}|i}$.

El punto (B) se sitúa "n" periodos posteriores a (A) y el valor futuro de la anualidad en este punto se denota $s_{\overline{n}|i}$

Donde

$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n = \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i} = VA(i, n, -1, , 0)$$

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = VF(i, n, -1, , 0)$$

Anualidad Vencida

Ejemplo 4

Encontrar el valor presente de una anualidad que paga $1,000 al final de cada año por 20 años, si la tasa de interés es 8% anual.

Solución

$$1000a_{\overline{20}|8\%} = \frac{1-\left(\frac{1}{1.08}\right)^{20}}{.08} = VA(8\%, 20, -1000, , 0)\boxed{= 9{,}818.15}$$

Ejemplo 5

José tiene $20,000 ahorrados y se sabe que la tasa de interés que le ofrece le banco es 10% convertible trimestral ¿Cuánto podrá retirar cada trimestre para acabarse su ahorro en 10 años?

Solución

$$Ra_{\overline{10*4}|\frac{10\%}{4}} = 20{,}000 \;\; despejando\ R = \frac{20{,}000}{a_{\overline{10*4}|\frac{10\%}{4}}} = \frac{20{,}000}{VA(2.5\%, 40, -1, , 0)}\boxed{= 796.72}$$

Anualidad Vencida

Ejemplo 6

Calcular el valor acumulado de

a. 500 mensuales durante 4 años tres meses, al 10% compuesto mensualmente.

$$500s_{\overline{51}|\frac{10\%}{12}} = 31{,}613.9457$$

b. 800 trimestrales durante 6 años 3 meses al 14.25% compuesto trimestralmente.

$$800s_{\overline{25}|\frac{14.25\%}{4}} = 31{,}420.2211$$

c. 1000 cada semestre durante 10 años al 12.23% compuesto semestralmente

$$1{,}000s_{\overline{20}|\frac{12.23\%}{2}} = 37{,}243.6006$$

Anualidad Vencida

Ejemplo 7

Calcular el valor acumulado de una anualidad de $3,000 por año, durante 7 años si la tasa de interés es de:

$a.$ i=8%

$$3{,}000a_{\overline{7}|8\%} = 26{,}768.4100$$

$b.$ i=10.75%

$$3{,}000a_{\overline{7}|10.75\%} = 29{,}125.0670$$

$c.$ i=17.29%

$$3{,}000a_{\overline{7}|17.29\%} = 35{,}633.9517$$

Ejemplo 8

Una inversión de $300,000 se usará para realizar pagos de $50,000 al final de cada año por el tiempo que sea posible. Si el fondo gana una tasa de interés anual efectiva de 5%. Encontrar cuántos pagos regulares se pueden hacer y determine el monto del pago más pequeño si: (1) se realiza en la fecha del último pago regular (2) si se realiza un año después del último pago regular.

Solución

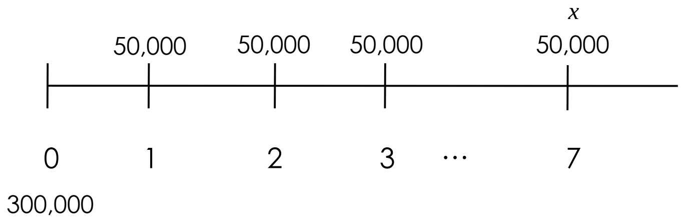
Se resuelve primero la siguiente ecuación de valor:

$$\$50{,}000\, a_{\overline{n}|5\%} = \$300{,}000$$
$$a_{\overline{n}|5\%} = 6$$

$$\boxed{\therefore t = 7 \text{años} 3 \text{meses}}$$

Solución (*Continuación*)

Para determinar el monto del pago más pequeño si (1) se realiza en la fecha del último pago regular. La ecuación de valor al final del año 7 es:



$$\$50{,}000 s_{\overline{7}|5\%} + x = \$300{,}000(1.05)^7$$

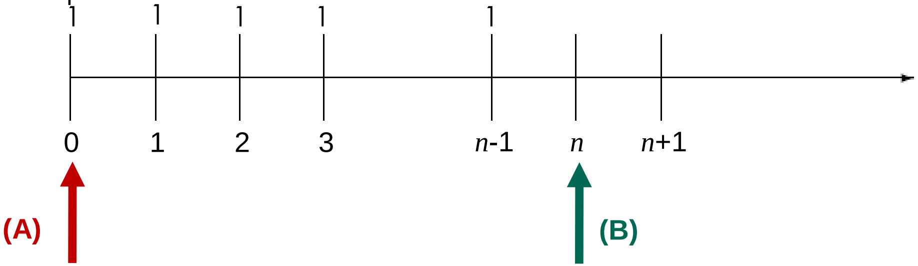
$$x = \$300{,}000(1.05)^7 - \$50{,}000 s_{\overline{7}|5\%}$$

$$x = \$422{,}130.13 - \$407{,}100.42$$

$$\boxed{x = \$15{,}029.70}$$

Anualidad Anticipada

Considere una anualidad en los cuales se realizan pagos de $1 al inicio de cada periodo durante "n" periodos.



El valor presente de esta anualidad valuado en (A), se denota $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$.
El punto (B) se sitúa "n" periodos posteriores a (A) y el valor futuro de la anualidad en este punto se denota $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$

Donde

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = VA(i, n, -1, , 1)$$

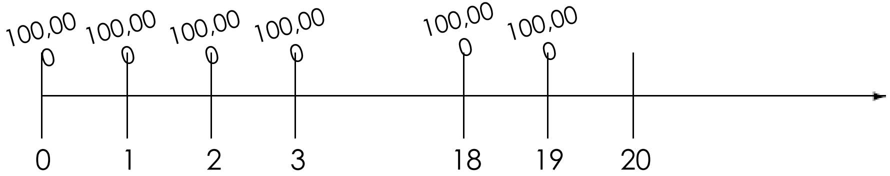
$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{1 - \frac{1}{1+i}} = VF(i, n, -1, , 1)$$

Anualidad Anticipada

Ejemplo 9

Rodrigo se ganó el Melate, por lo que recibirá $2,000,000 en 20 pagos de $100,000 cada año. Recibe hoy el primer pago y los siguientes en intervalos de 1 año. ¿Cuál es el valor presente del premio ganado a una tasa de interés anual de 10%? $a)VP = 592{,}058 \quad b)VP = 603{,}169 \quad c)VP = 714{,}270 \quad d)VP = 825{,}381 \quad \boxed{e)VP = 936{,}492}$

Solución



$$VP = \$100{,}000\,\ddot{a}_{\overline{20}|10} = \$100{,}000\left(\frac{1-v^{20}}{d}\right)$$

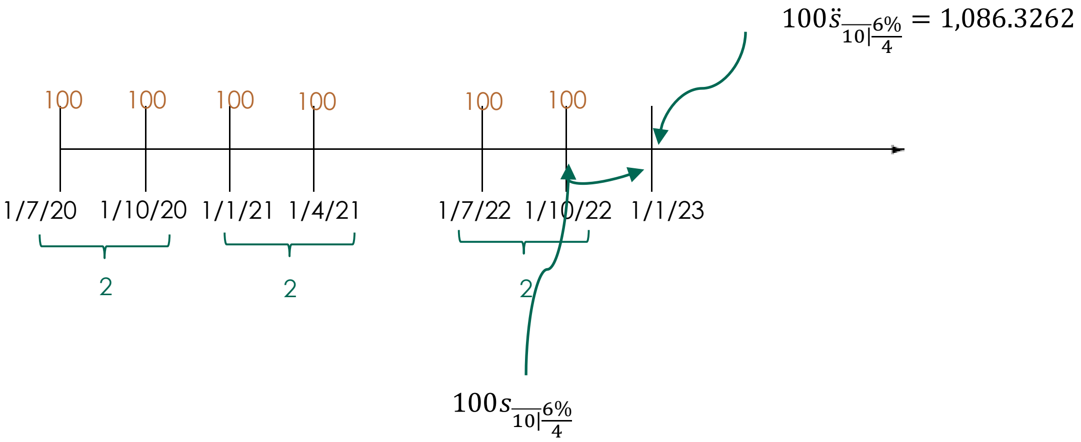
$$VP = \$100{,}000\left(\frac{1-1.1^{-20}}{1-(1/1.1)}\right) = \$936{,}492 \quad \boxed{\therefore e)}$$

Anualidad Anticipada

Ejemplo 10

Natalia deposita $100 cada tres meses en una cuenta de ahorros que paga intereses del 6% convertible trimestral. Si hace su primer depósito el 1 de julio de 2020, ¿qué saldo tendrá la cuenta justo antes del depósito de enero de 2023?

Solución



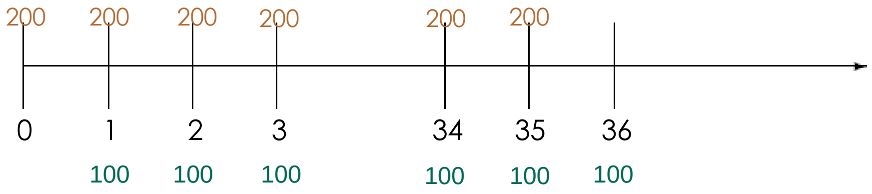
Anualidad Anticipada

Ejemplo 11

Pablo deposita $200 al comienzo de cada mes en una cuenta de ahorro que otorga una tasa de interés anual efectiva de 4%. Al final de cada mes retira $100 ¿Cuál es el balance de la cuenta al final del tercer año?

$a)VF_3 = 3{,}758$ $\boxed{b)VF_3 = 3{,}839}$ $c)VF_3 = 3{,}970$ $d)VF_3 = 4{,}005$ $e)VF_3 = 4{,}568$

Solución



$$\frac{i^{(12)}}{12} = (1.04)^{1/12} - 1 = .00327374$$

$$VF_3 = \$200\ddot{s}_{\overline{36}|0.003273} - \$100 s_{\overline{36}|0.003273}$$

$$VF_3 = \$200\left(\frac{1.003273^{36} - 1}{1 - 1.003273^{-1}}\right) - \$100\left(\frac{1.003273^{36} - 1}{0.003273}\right)$$

$$= \$200(38.2659) - \$100(38.1410) = \$7{,}653.19 - \$3{,}814.11 = \boxed{\$3{,}839.08}$$

Ejemplo 12

Pedro empieza un fondo de ahorro mediante depósitos trimestrales de MXN $1,000 iniciando el 1° de junio N. Encuentre el valor acumulado al 1° de junio de N+4 inmediatamente después del ultimo depósito y que el fondo de ahorro gana una tasa de $i^{(2)} = 8.08\%$

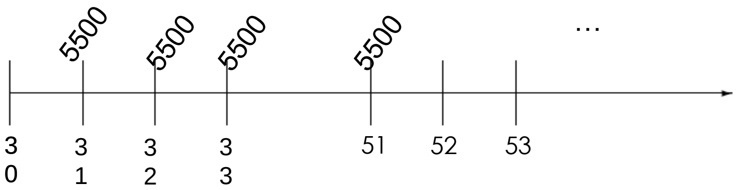
Solución

$$1{,}000 s_{\overline{16}|3.96\%} = \$23{,}619.35$$

Ejemplo 13

Para prepararse para su jubilación, un trabajador deposita $5,500 en un plan de ahorro para el retiro cada año durante 20 años comenzando en su cumpleaños 31. Cuando llega a los 51 desea retirar 30 pagos anuales iguales. ¿De qué cantidad será cada retiro si la tasa de interés es del 12% efectivo anual durante los primeros 10 años; 10% efectiva anual para los siguientes 10 años y 11% efectivo anual para el periodo de retiro de 30 años?

Solución



$$5{,}500a_{\overline{10}|12\%}(1.10)^{10} + 5{,}500a_{\overline{10}|10\%} = xa_{\overline{30}|11\%}$$

$$250{,}342.95 + 87{,}655.84 = 8.69x$$

$$\therefore x = 38{,}878.17$$

Relaciones

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = (1+i)^n \frac{1-v^n}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n$$

De igual manera

$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} v^n$$

Ecuaciones de Valor Presente

$$a_{\overline{n+m}|i} = a_{\overline{m}|i} + v^m a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} + v^n a_{\overline{m}|i}$$

Ecuaciones de Valor Acumulado

$$s_{\overline{n+m}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)^m + s_{\overline{m}|i} = s_{\overline{m}|i}(1+i)^n + s_{\overline{n}|i}$$

Relaciones

A partir de las definiciones anteriores, se pueden observar las siguientes relaciones entre anualidades vencidas y anticipadas:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)$$
$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)$$

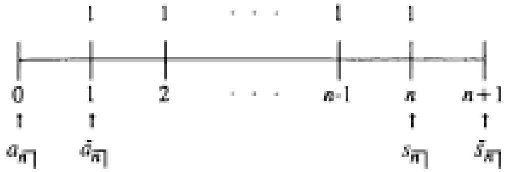
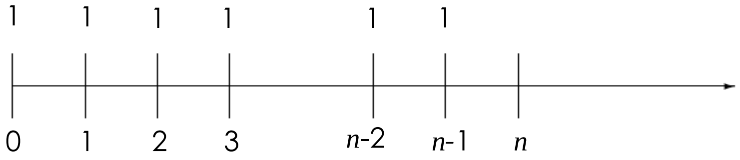


Figure 3.3 Time diagram comparing an annuity-immediate with an annuity-due

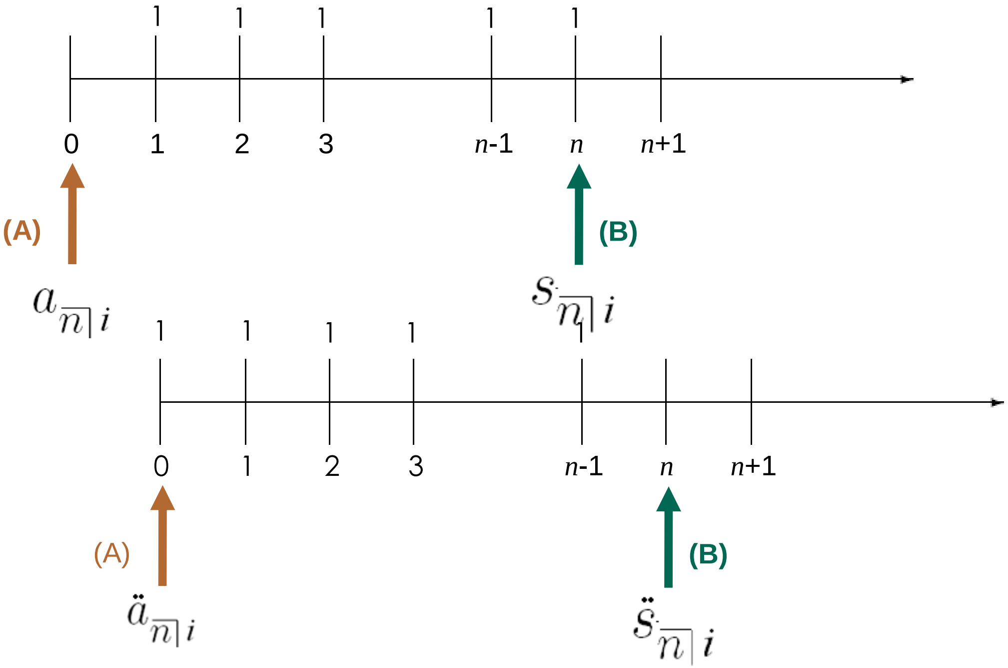
Pero también existe otro tipo de relación:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$



De manera similar se tiene: $$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

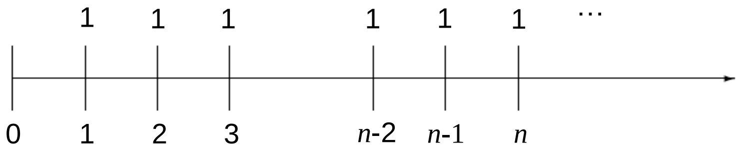
Relaciones



1 1 1 1 1
0 1 2 3 n-1 n n+1
(A)
(B)
$a_{\overline{n}|i}$
$s_{\overline{n}|i}$
1 1 1 1 1
0 1 2 3 n-1 n n+1
(A)
(B)
$\ddot{a}_{\overline{n}|i}$
$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$

Perpetuidades

Una *perpetuidad* es una anualidad en la cual los pagos continúan por siempre. *i.e.* una anualidad no finita. El valor presente, de una anualidad vencida se denota $a_{\overline{\infty}|}$



$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots$$

$$a_{\overline{\infty}|} = v\left(1 + v + v^2 + \cdots\right)$$

$$a_{\overline{\infty}|} = v\,\frac{1}{1-v}$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$

De forma alterna, tenemos

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Ejemplo 14

Suponga que una Compañía emite un instrumento financiero que paga dividendos de $60,000 al final de cada año de forma indefinida. Si el costo de capital es 6%, calcule el valor del instrumento financiero al principio del año.

Solución

$$VP = \$60{,}000a_{\overline{\infty}|6\%}$$

$$\boxed{VP = \$1'000{,}000}$$

En Resumen

Valor Presente Perpetuidad Vencida $\qquad a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$

Valor Presente Perpetuidad Anticipada $\qquad \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}$

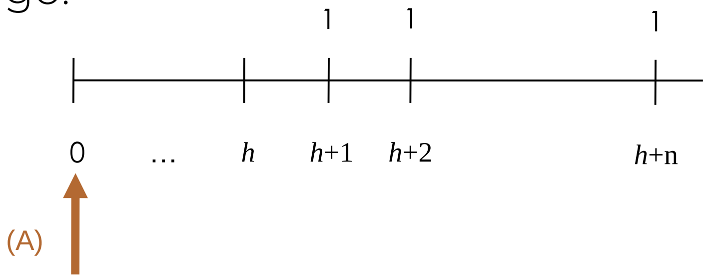
Resumen de Anualidades Básicas

	Valor Presente (VP)	Valor Fututo o Acumulado (VF)
Anualidad Vencida	$a_{\overline{n}\rvert} = \dfrac{1-v^n}{i}$	$s_{\overline{n}\rvert} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
Anualidad Anticipada	$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert} = \dfrac{1-v^n}{d}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{d}$
Perpetuidad Vencida	$a_{\overline{\infty}\rvert} = \dfrac{1}{i}$	$n.a.$
Perpetuidad Anticipada	$\ddot{a}_{\overline{\infty}\rvert} = \dfrac{1}{d}$	$n.a.$

Anualidades Diferidas

Anualidad Vencida Diferida

Considere una anualidad diferida "h" periodos vencida, en la cual el primer pago se realiza en el periodo de pago $h+1$ y todos los pagos se realizan al final de cada periodo de pago.



El valor presente de esta anualidad valuado en (A), se denota por:

$${}_{h|}a_{\overline{n}|i}$$

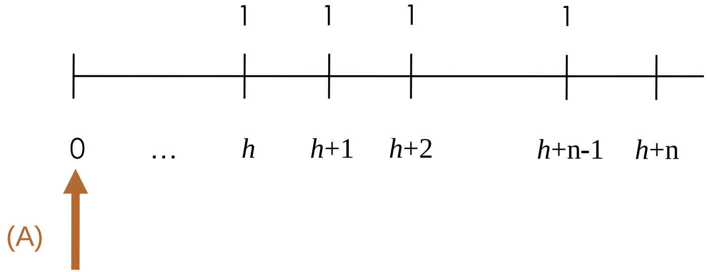
Donde

$${}_{h|}a_{\overline{n}|i} = v^{h+1} + v^{h+2} + v^{h+3} + \cdots + v^{h+n} = \sum_{t=h+1}^{h+n} v^{t} = \sum_{t=1}^{n} v^{t+h} = v^{h} a_{\overline{n}|i}$$

$${}_{h|}a_{\overline{n}|i} = v^{h} a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+h}|} - a_{\overline{h}|i}$$

Anualidad Anticipada Diferida

Considere una anualidad diferida "h" periodos anticipada, en la cual el primer pago se realiza en el periodo de pago h y todos los pagos se realizan al principio de cada periodo de pago.

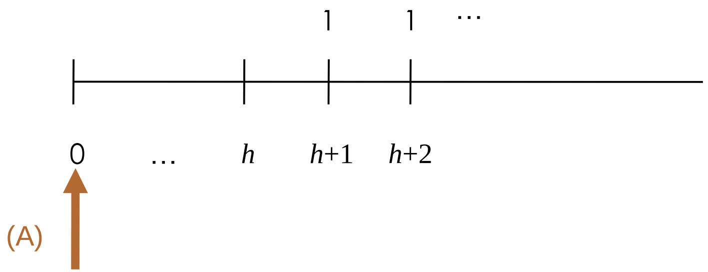


El valor presente de esta anualidad valuado en (A), se denota por: ${}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

Donde

$$
{}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^h + v^{h+1} + v^{h+2} + \cdots + v^{h+n-1} = \sum_{t=h}^{h+n-1} v^t = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+h} = v^h \ddot{a}_{\overline{n}|i}
$$

Perpetuidad diferida "h" años vencida, el primer pago se realiza en el periodo de pago h+1 y todos los pagos se realizan al final de cada periodo de pago.



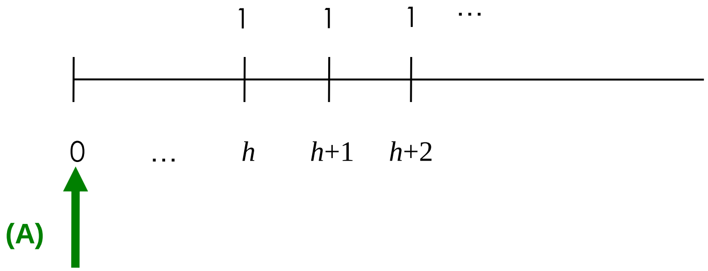
El valor presente de esta perpetuidad valuado en (A), se denota por: ${}_{h|}a_{\overline{\infty}|}$

Donde

$$ {}_{h|}a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} {}_{h|}a_{\overline{n}|} = v^{h+1} + v^{h+2} + \cdots = \lim_{n\to\infty} v^{h} a_{\overline{n}|} = v^{h}\left(\frac{1}{i}\right) $$

Perpetuidad Anticipada Diferida

Perpetuidad diferida "h" años anticipada, el primer pago se realiza en el periodo de pago h+1 y todos los pagos se realizan al inicio de cada periodo de pago.



El valor presente de esta perpetuidad valuado en **(A)**, se denota por: ${}_{h|}\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$

Donde

$$ {}_{h|}\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \lim_{n\to\infty} {}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{h+1} + v^{h+2} + \cdots = \lim_{n\to\infty} v^{h}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{h}\left(\frac{1}{d}\right) $$

Ejemplo Anualidades Diferidas

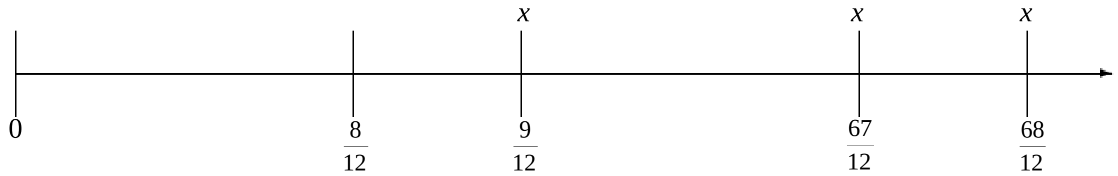
Ejemplo 15

Una persona pide prestados $10,000 y logra negociar su pago de la siguiente manera:

- realizar un primer pago al final del noveno mes, y
- realizar 60 pagos mensuales iguales.

Si x corresponde al monto de los pagos y la tasa de interés anual es de 18% anual convertible mensual. ¿Cuál es el valor de x?

Solución



$$\$10,000 = xv^8 a_{\overline{60}|1.5\%}$$

$$x = \$10,000 \frac{i}{1-v^{60}}(1+i)^8$$

$$\$10,000 = 12x \, {}_{\frac{8}{12}|}a^{(12)}_{\overline{5}|19.56\%}$$

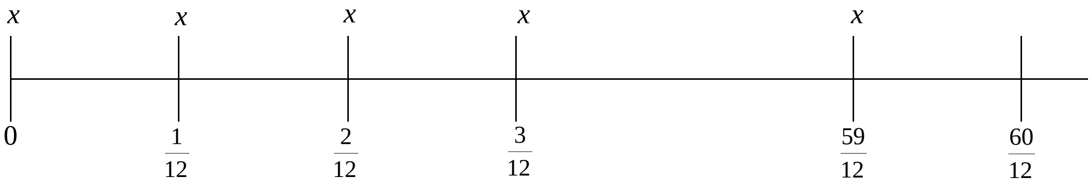
$$\boxed{x = \$286.06}$$

Ejemplo Anualidades Diferidas

Ejemplo 16

A partir del Ejemplo 15 calcular la cantidad de cada pago si se realizan los pagos de forma anticipada y sin diferimiento.

Solución



$$\$10{,}000 = x\ddot{a}_{\overline{60|}1.5\%}$$

$$\$10{,}000 = 12x\ddot{a}^{(12)}_{\overline{5|}19.56\%}$$

$$x = \$10{,}000\,\frac{1-v}{1-v^{60}}$$

$$x = \frac{\$10{,}000}{12}\cdot\frac{d^{(m)}}{1-v^{5}}$$

$$\boxed{x = \$250.18}$$

¡Gracias!

Asociación Mexicana de Inversionistas

Fernando J. MARTINEZ EISSA

W:55 2128 2207
M: fereissa@gmail.com