Matemáticas Financieras

Tasas Equivalentes

POR: Fernando J. Martínez Eissa
Académico

Interés en el tiempo

¿Cómo se comportan los intereses cuando varía el periodo sobre el cual se define la tasa de interés?

Ejemplo 1

Se invierten $1,000 durante 5 años. Utilizando el régimen de interés simple ¿Cuál será el monto al final de los 5 años si:

1. Los periodos son anuales y la tasa de interés es 12% anual?

$$M(5) = \$1{,}000(1 + (5)(12\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

2. Los periodos son semestrales y la tasa de interés es 6% semestral?

$$M(10) = \$1{,}000(1 + (10)(6\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

3. Los periodos son trimestrales y la tasa de interés es 3% trimestral?

$$M(20) = \$1{,}000(1 + (20)(3\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

4. Los periodos son mensuales y la tasa de interés es 1% mensual?

$$M(60) = \$1{,}000(1 + (60)(1\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

Interés en el tiempo

Ejemplo 2

Se invierten $1,000 durante 5 años. Utilizando el régimen de interés compuesto ¿Cuál será el monto al final de los 5 años si:

1. Los periodos son anuales y la tasa de interés es 12% anual?

$$M(5)=\$1{,}000(1+(12\%))^{5}=\boxed{\$1{,}762.34}$$

2. Los periodos son semestrales y la tasa de interés es 6% semestral?

$$M(10)=\$1{,}000(1+(6\%))^{10}=\boxed{\$1{,}790.84}$$

3. Los periodos son trimestrales y la tasa de interés es 3% trimestral?

$$M(20)=\$1{,}000(1+(3\%))^{20}=\boxed{\$1{,}806.11}$$

4. Los periodos son mensuales y la tasa de interés es 1% mensual?

$$M(60)=\$1{,}000(1+(1\%))^{60}=\boxed{\$1{,}816.69}$$

Tasa de interés nominal

Como se puede observar a partir de los ejemplos anteriores, bajo el régimen de Interés Simple, no existe diferencia alguna, mientras que bajo el régimen de Interés Compuesto, los intereses aumentan conforme el periodo de capitalización disminuye.

También, podemos notar que la variable del tiempo, está expresada en periodos relativos partiendo de la definición de la tasa de interés *i.e.* tasa mensual, periodos mensuales

A partir de esto, podemos detectar que surge la necesidad de definir una tasa de interés que especifique el periodo de capitalización en el régimen de interés compuesto, a la cual denominaremos Tasa de Interés Nominal.

Tasa de interés nominal

Generalmente, la tasa de interés se establece como la tasa efectiva por periodo. Por interés al 10% anual, se entiende que la tasa efectiva de interés al año es de 10%, *i.e.* que el periodo de capitalización es de un año.

Si el periodo de capitalización no es anual, entonces se debe indicar expresamente la frecuencia de conversión *e.g.* interés al 8% anual convertible trimestral, indica que el tiempo está medido en años y que su periodo de capitalización es cada tres meses, por lo tanto la tasa de interés efectiva por trimestre es 2%

En conclusión, la Tasa de Interés Nominal, **NO** sirve para calcular los intereses (exceptuando el caso en que el periodo de capitalización sea igual al periodo de medición del tiempo). Para calcular intereses, necesitamos Tasa de Interés Efectiva.

Tasa de interés nominal

Notación

Se denota como $i^{(m)}$ a la tasa nominal anual convertible m veces al año, es decir, existen m periodos de capitalización en un año. Por ejemplo para el caso trimestral, se convierte 4 veces al año, para el caso semestral, 2 veces, etc.

La tasa nominal convertible m veces al año $i^{(m)}$, tiene dos implicaciones:

1. Existen m periodos de capitalización en un año.
2. $\frac{i^{(m)}}{m}$ es la tasa efectiva por m-*ésimo* de año.

Por lo tanto, la función acumulación será:

$$a(t) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$$

Tasa de interés nominal

Ejemplo 3

¿Cuál será el monto que producirá una inversión de $10,000 después de 3 años a una tasa del 4% anual convertible mensualmente?

Solución

$$M(36) = \$10{,}000\left(1+\frac{0.04}{12}\right)^{12\cdot 3}$$

$$= \$10{,}000(1+.0033)^{36}$$

$$\boxed{= \$11{,}272.72}$$

Tasas equivalentes

Decimos que dos tasas anuales de interés con diferentes periodos de conversión, son equivalentes si producen el mismo interés al final del mismo periodo.

Ejemplo 4

¿Cuánto será el Valor Futuro al final de un año de \$20,000 que se invierten en $t=0$?

1. Si se invierten al 5% anual convertible trimestralmente

$$M(4)=\$20{,}000\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^{4} \boxed{=\$21{,}018.91}$$

2. Si se invierten al 5.094534% efectivo anual.

$$M(1)=\$20{,}000(1+0.05094534) \boxed{=\$21{,}018.91}$$

Por lo tanto, las tasas del 5% anual convertible trimestralmente y 5.094534% efectivo anual, son equivalentes.

Tasas equivalentes

Para encontrar la relación que existe entre una tasa nominal anual $i^{(m)}$ y una tasa efectiva anual i, establecemos las siguientes igualdades:

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=(1+i) \quad y \quad \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}=(1+i)^{t}$$

De las cuales obtenemos:

$$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}-1 \quad e \quad i^{(m)}=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

De igual forma, podemos establecer la siguiente relación:

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}=\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^{nt}$$

Obteniendo

$$i^{(m)}=m\left[\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^{\frac{n}{m}}-1\right]$$

Ejemplo 5

Encontrar la tasa de interés nominal anual convertible trimestralmente que sea equivalente a una tasa del 18% anual convertible semestralmente.

Solución

Tenemos

$$\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4t}=\left(1+\frac{18\%}{2}\right)^{2t}$$

Despejando

$$i^{(4)}=4\left[\left(1+\frac{18\%}{2}\right)^{\frac{2}{4}}-1\right]$$

$$i^{(4)}=4\left[(1+0.09)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$\boxed{i^{(4)}=17.61\%}$$

Tasas equivalentes

Ejemplo 6

Si una acción ofrece el 15% de interés efectivo anual.

1. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva mensual equivalente?

$$\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12}=(1+0.15)\Rightarrow \frac{i^{(12)}}{12}=(1+0.15)^{\frac{1}{12}}-1 \therefore \frac{i^{(12)}}{12}=\boxed{1.17\%}$$

2. ¿Cuál será la correspondiente tasa nominal semestral convertible mensualmente?

   Dada la tasa efectiva mensual, se multiplica por el número de meses del semestre, *i.e.* 6(1.17%)=$\boxed{7.02\%}$

3. ¿Cuál será la tasa nominal anual convertible mensualmente?

   Dada la tasa efectiva mensual, se multiplica por el número de meses del año, *i.e.* 12(1.17%)=$\boxed{14.1\%}$

Tasa de descuento nominal

Notación

Se denota como $d^{(m)}$ a la tasa nominal de descuento anual convertible m veces al año y denota los intereses pagados al comienzo de cada *m-ésima* parte del año.

Si $d^{(m)}$ es la tasa nominal de descuento convertible m veces al año, entonces $\frac{d^{(m)}}{m}$ es la tasa de descuento efectiva por *m-ésimo* de año.

Por lo tanto, la función acumulación será: $$a(t)=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$$

y la función de descuento es: $$a(t)^{-1}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}$$

Tasa de descuento nominal

El capital que resulta de descontar una unidad monetaria que se encuentra al final de un año a las tasas de descuento efectiva anual, d, y de descuento nominal anual, $d^{(m)}$, cuando estas son equivalentes es:

$$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}=(1-d) \quad y \quad \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}=(1-d)^{t}$$

De las cuales obtenemos:

$$d=1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \quad y \quad d^{(m)}=m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$$

De igual forma, podemos establecer la siguiente relación:

$$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{d^{(n)}}{n}\right)^{n}$$

Siguiendo la misma idea:

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{d^{(n)}}{n}\right)^{-n}$$

Fuerza de interés

Como se habrá observado, las mediciones de interés que se han definido, son útiles para determinados intervalos de tiempo. Las tasas efectivas de interés o de descuento, miden el interés sobre el periodo de medición, mientras que las tasas nominales lo hacen sobre *m-ésimos* de periodo.

En ocasiones es útil medir la intensidad con la cual operan los intereses en cada momento del tiempo *i.e.* sobre intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños. La medición de este tipo de intereses de momentos individuales se llama fuerza de interés.

Sea $\delta = \ln(1+i)$ donde i es la tasa de interés efectiva anual.

Fuerza de interés

Otra forma de ver la fuerza de interés es como una tasa de crecimiento, misma que se define como:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Si la expresamos por unidad de tiempo, tenemos:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{f(t)\cdot h}$$

Para obtener la tasa de crecimiento instantáneo, se toma el límite de h cuando tiende a 0.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{f(t)\cdot h}=\frac{1}{f(t)}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$=\frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}=\frac{d\ln f(t)}{dt}=\delta_t$$

Fuerza de interés

Reemplazando t por r, e integrando ambos lados de 0 a t.

$$\int_0^t \delta_r dr = \int_0^t \frac{d \ln f(r)}{dr} dr = \ln f(r)\Big|_0^t = \ln \frac{f(t)}{f(0)}$$

$$e^{\int_0^t \delta_r dr} = \frac{f(t)}{f(0)} \Rightarrow f(t) = f(0) e^{\int_0^t \delta_r dr}$$

Si consideramos que $f(0)=K$ es el capital inicial y $f(t)=M(t)$ el monto de la inversión al tiempo t.

Entonces $a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}$

Se puede ver como la función acumulación.

Fuerza de interés

Propiedades de la Función Acumulación:

1. $a(t)$ está definida $\forall t \geq 0$
2. $a(0) = e^{\int_0^0 \delta_r dr} = e^0 = 1$
3. $a(t)$ es generalmente una función no-decreciente.

$$a'(t) = \delta_t e^{\int_0^t \delta_r dr} \geq 0 \quad si \quad \delta_r \geq 0, \forall r \geq 0 \therefore \text{No decreciente}$$

4. Es una función continua.

En general, denominaremos a δ_t como la función fuerza de interés

$$e^{\int_0^t \delta_r dr} = a(t)$$

$$\int_0^t \delta_r dr = \ln[a(t)]$$

$$\delta_t = \frac{d}{dt}\ln[a(t)] = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

Fuerza de interés

Tasas Efectivas de Interés por periodo

$$i_{t1,t2}=\frac{a(t_2)-a(t_1)}{a(t_1)}=\frac{e^{\int_0^{t2}\delta_r dr}-e^{\int_0^{t1}\delta_r dr}}{e^{\int_0^{t1}\delta_r dr}}=e^{\int_0^{t2}\delta_r dr-\int_0^{t1}\delta_r dr}-1=e^{\int_{t1}^{t2}\delta_r dr}-1$$

En particular

$$i_n=e^{\int_{n-1}^{n}\delta_r dr}-1$$

Régimen de Interés Simple.

$$a(t)=1+it$$

Entonces $\delta_t=\frac{a'(t)}{a(t)}$

$$\boxed{\therefore\delta_t=\frac{i}{1+it}}$$

Régimen de Interés Compuesto.

$$a(t)=(1+i)^t$$

Entonces $\delta_t=\frac{d}{dt}\ln a(t)$

$$\delta_t=\frac{d}{dt}t\ln(1+i)$$

$$\delta_t=\ln(1+i)$$

$$\boxed{\therefore\delta_t=\delta}$$

Fuerza de interés

Consideremos el caso en el que las fuerzas de interés varían tanto en el tiempo como en su forma en el intervalo $(0,t]$.

$$\delta(r)=\begin{cases}\delta_1(r) & 0<r\le t_1\\ \delta_2(r) & t_1<r\le t_2\\ \delta_3(r) & t_2<r\le t\end{cases}$$

También sabemos que:

$$a(t)=\left(1+i_{0,t_1}\right)\left(1+i_{t_1,t_2}\right)\left(1+i_{t_2,t}\right)$$

$$i_{0,t_1}=e^{\int_0^{t_1}\delta_1(r)dr}-1;\ i_{t_1,t_2}=e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta_2(r)dr}-1 \text{ y } i_{t_2,t}=e^{\int_{t_2}^{t}\delta_3(r)dr}-1$$

$$\therefore a(t)=\left(e^{\int_0^{t_1}\delta_1(r)dr}\right)\left(e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta_2(r)dr}\right)\left(e^{\int_{t_2}^{t}\delta_3(r)dr}\right)=e^{\int_0^{t}\delta(r)dr}$$

Fuerza de interés

Para el caso particular de Interés Compuesto, se tiene:

$$\delta(r)=\begin{cases}\delta_1 & 0<r\leq t_1\\ \delta_2 & t_1<r\leq t_2\\ \delta_3 & t_2<r\leq t\end{cases}$$

$$\therefore a(t)=\left(e^{\int_0^{t_1}\delta_1 dr}\right)\left(e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta_2 dr}\right)\left(e^{\int_{t_2}^{t}\delta_3 dr}\right)=e^{\delta_1 t_1}e^{\delta_2(t_2-t_1)}e^{\delta_3(t-t_2)}$$

Tasa de interés variable

Ejemplo 7

Considerar una tasa de interés efectiva anual de 8% durante los primeros 3 años y del 12% durante los siguientes 5 años. Calcular la función de acumulación correspondiente.

Solución

- Calculando directamente, tenemos:

$$a(t)=\begin{cases}(1.08)^t & 0<t\leq 3\\(1.08)^3(1.12)^{t-3} & 3<t\leq 8\end{cases}$$

- Mediante tasas efectivas

Para $0\leq t<3$

$$i_{0,t}=\frac{a(t)-a(0)}{a(0)}=a(t)-1=(1.08)^t-1$$

Para $3\leq t\leq 8$

$$i_{3,t}=\frac{a(t)-a(3)}{a(3)}=\frac{a(t)}{a(3)}-1=\frac{(1.12)^t}{(1.12)^3}-1$$

$$=\boxed{(1.12)^{t-3}-1}$$

Tasa de interés variable

Solución (*Continuación*)

- Mediante tasas efectivas

$$a(t)=\begin{cases} 1+i_{0,t} & =(1.08)^{t} & 0\le t<3 \\ (1+i_{0,3})(1+i_{4,8}) & =(1.08)^{3}(1.12)^{t-3} & 3\le t\le 8 \end{cases}$$

- Mediante funciones de fuerzas de interés

$$\delta(r)=\begin{cases} \delta_1(r)=\ln(1.08) & 0\le r<3 \\ \delta_2(r)=\ln(1.12) & 3\le r\le 8 \end{cases}$$

$$a(t)=\begin{cases} e^{\int_0^t \delta_1(r)dr}=e^{t\ln(1.08)}=(1.08)^{t} & 0\le t<3 \\ e^{\int_0^3 \delta_1(r)dr+\int_3^t \delta_2(r)dr}=e^{3\ln(1.08)}e^{(t-3)\ln(1.12)}=(1.08)^{3}(1.12)^{t-3} & 3\le t\le 8 \end{cases}$$

Tasas equivalentes entre regímenes

Como se comentó con anterioridad, dos tasas son equivalentes, si producen el mismo interés al final de un mismo periodo independientemente del periodo considerado.

Para el caso en que se consideren diferentes regímenes de inversión, las tasas serán equivalentes exclusivamente en un periodo de inversión, por lo que es necesario que se determine el periodo en que se desea determinar la equivalencia.

Ejemplo 8

Calcular la tasa de interés simple anual que equivale a una tasa de interés compuesto anual de 8% en los siguientes periodos: 1 semestre y 3 años.

$$a)(1+0.5i)=(1+.08)^{1/2} \Rightarrow i=\frac{\sqrt{1.08}-1}{0.5}=\boxed{7.84\%}$$

$$b)(1+3i)=(1+.08)^{3} \Rightarrow i=\frac{(1.08)^{3}-1}{3}=\boxed{8.65\%}$$

Ejercicios

Ejemplo 9

Encontrar la función fuerza de interés equivalente, si se considera la siguiente función de acumulación

$$a(t)=t^2+2t+1$$

Solución

Sabemos que:

$$a(t)=e^{\int_0^t \delta_r dr}$$

$$\ln a(t)=\int_0^t \delta_r dr \Rightarrow \delta_r=\frac{d\ln a(t)}{dt}=\frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}$$

$$\boxed{\therefore \delta_r=\frac{2t+2}{t^2+2t+1}}$$

Ejercicios

Ejemplo 10

Se tienen $50,000 para invertir en 3 años. Para el primer año, la tasa de descuento anual convertible mensualmente es de 8%, el segundo año, la tasa de interés convertible trimestralmente es de 4% y el tercer año, la fuerza de interés es del 2% anual.
Calcular la tasa de interés efectiva anual constante para los tres años equivalente para el esquema de inversión presentado para los 3 años.

Solución

Tenemos:

$$a(3)=\left(\frac{1}{1-\frac{d^{(12)}}{12}}\right)^{12}\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4}\left(e^{\delta}\right)=\left(\frac{1}{1-\frac{8\%}{12}}\right)^{12}\left(1+\frac{4\%}{4}\right)^{4}\left(e^{2\%}\right)=\boxed{1.1504}$$

Ejercicios

Solución Ejercicio 10 (*Continuación*)

Por otra parte, necesitamos calcular:

$$a(3) = (1+i)^3 = 1.1504$$

$$i = (1.1504)^{1/3} - 1$$

$$\boxed{\therefore i = 4.78\%}$$

¡Gracias!

Asociación Mexicana de Inversionistas

Fernando J. MARTINEZ EISSA

W:55 2128 2207
M: fereissa@gmail.com

Anexo fuerza de interés

Dado que

$$(1+i)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

Tenemos

$$\delta=\ln(1+i)=m\ln\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$$

Despejando $i^{(m)}$

$$\frac{\delta}{m}=\ln\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$$

$$i^{(m)}=m\left(e^{\frac{\delta}{m}}-1\right)$$

Escribiendo la exponencial como serie de Taylor

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots$$

Tenemos:

$$i^{(m)}=m\left(\left(1+\frac{\delta}{m}+\frac{(\delta/m)^{2}}{2!}+\frac{(\delta/m)^{3}}{3!}+\cdots\right)-1\right)$$

$$\therefore i^{(m)}=\delta+\frac{\delta^{2}}{2!m}+\frac{\delta^{3}}{3!m^{2}}+\cdots$$

Si m tiende a infinito (capitalización continua), obtenemos

Anexo fuerza de interés

Si m tiende a infinito (capitalización continua), obtenemos

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

De igual forma y siguiendo el mismo razonamiento que el utilizado para la tasa de interés, tenemos:

Sea $\delta = Ln(1+i)$ donde i es la tasa de interés efectiva anual.

Sabemos que $$(1+i) = \left(\frac{1}{1-d}\right)$$

Entonces $$\delta = -\ln(1-d)$$

Dado que $$\frac{1}{(1-d)} = \left(\frac{1}{1-\dfrac{d^{(m)}}{m}}\right)^{m}$$

Obtenemos $$\delta = -m\ln\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)$$

Anexo fuerza de interés

Siguiendo el mismo razonamiento que para las tasas de interés, tenemos:

Despejando $d^{(m)}$

$$-\frac{\delta}{m} = \ln\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)$$

$$d^{(m)} = m\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)$$

Escribiendo la exponencial como serie de Taylor $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Tenemos:

$$d^{(m)} = m\left(\left(1 - \frac{-\delta}{m} - \frac{(-\delta/m)^2}{2!} - \frac{(-\delta/m)^3}{3!} - \cdots\right) - 1\right)$$

$$\therefore d^{(m)} = \delta - \frac{\delta^2}{2!m} + \frac{\delta^3}{3!m^2} - \cdots$$

Si m tiende a infinito (capitalización continua), obtenemos:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta$$

Finalmente, observamos que la tasas de interés y descuento continuo son iguales.