Asociación Mexicana de Inversionistas

Matemáticas Financieras

Regímenes de Interés

POR: Fernando J. Martínez Eissa
Académico

Capitalización de Intereses

Periodo de Capitalización: Intervalo de tiempo al final del cual se reinvierten los intereses. *i.e.* los intereses se convierten en capital. Generalmente se mide en años.

Frecuencia de Capitalización: Corresponde al número de veces por año en el interés se suma al capital. El periodo de capitalización es el inverso de la frecuencia de capitalización.

Acorde al manejo de la reinversión de los intereses, se tienen dos regímenes financieros:

1. Régimen de Interés Simple: Solamente el capital genera intereses. *i.e.* nunca se convierten a capital los intereses.
2. Régimen de Interés Compuesto: Los intereses se reinvierten para generar nuevos intereses.

Régimen de Interés Simple

Interés Simple

El régimen de Interés Simple, se caracteriza por que los intereses que obtiene una inversión, son retirados, por lo que no se agregan al capital.

Así, los intereses son proporcionales al capital inicial invertido y a la duración de la operación. El capital se mantiene constante.

Considere una inversión de $1 tal que el monto del interés ganado durante ese periodo es constante.

Invierte	1	1	1	1	
Tiempo	0	1	2	3	t
Monto al Final		$1+i$	$1+i$	$1+i$	
Monto Acumulado		$1+i$	$1+2i$	$1+3i$	$1+ti$

Interés Simple

Sea i la tasa de interés simple y t (en años) el periodo de tiempo por el cual se invierte un capital K. Entonces:

$$I(t) = Kit$$

Así, tenemos
$$I(n,t) = I(t) - I(n) = Kit - Kin = Ki(t-n)$$

Periodo	Capital	Intereses del Periodo	Monto
n	K	$I(n\text{-}1,n)$	$M(n)$
1	K	$I(0,1)=Ki$	$M(1)=K+Ki=K(1+i)$
2	K	$I(1,2)=Ki$	$M(2)=K(1+i)+Ki=K(1+2i)$
. . .	. . .	. . .	. . .
n	K	$I(n\text{-}1,n)=Ki$	$M(n)=K(1+(n\text{-}1)i)+Ki=K(1+ni)$

Interesés Simple

De la tabla anterior, se puede observar que $M(n)=K(1+ni)$, es decir es de la forma $M(n)=Ka(n)$. Por lo tanto, la función acumulación cuando se considere el interés simple será: $a(n)=1+ni$

El tener una tasa de interés simple constante a lo largo de un periodo, no implica que la tasa de interés efectiva en ese periodo sea constante, de hecho disminuye a lo largo del tiempo.

$$i_1=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=\frac{1+i-1}{1}=i$$

$$i_2=\frac{a(2)-a(1)}{a(1)}=\frac{1+2i-1-i}{1+i}=\frac{i}{1+i}$$

$$i_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}=\frac{1+ni-1-(n-1)i}{1+(n-1)i}=\frac{i}{1+(n-1)i}$$

Interés Simple

Ejemplo 1

Suponga que se invierten MXP$8,000 a una tasa de interés simple de 15% por año. ¿Cuál es el valor acumulado de dicha inversión al final de 4 años?

Solución

Tenemos:

$M(0)$= MXP$8,000

n= 4

i= 15%

S= ?

$$S = K(1+ni)$$

$$S = MXP\$8{,}000 \cdot [1+4(.15)]$$

$$S = MXP\$8{,}000[1.60]$$

$$\boxed{S = MXP\$12{,}800}$$

K	Principal	**$ 8,000.00**	$ 8,000.00	$ 8,000.00	$ 8,000.00
i	Tasa de Interés	15.00%	**15.00%**	15.00%	15.00%
n	Años	4	4	**4**	4
S	Valor Final	$ 12,800.00	$ 12,800.00	$ 12,800.00	**$ 12,800.00**

Interés Simple

Ejemplo 2

Un T-Bill Americano con valor facial de \$100 es un "security" canjeable por US\$100 a la fecha de maduración.

Suponga que dicho T-Bill se emite el 23 de mayo de 2022 y madura el 28 de agosto de 2022. Dado que el precio del T-Bill es de US\$99.27076, encontrar la tasa de interés anual bajo el supuesto de interés simple.

Solución

Tenemos:

K= US\$99.27076

n= 97 días

i= ?

S= US\$100

$$S = K(1+ni)$$

$$i = \frac{\left(\frac{S}{K} - 1\right)}{n}$$

$$i = \frac{\left(\frac{US\$100}{US\$99.27076} - 1\right)}{(97/365)}$$

$$\boxed{i = 2.7642\%}$$

Ejemplo 3

¿En cuánto tiempo se duplicará una suma de dinero si la tasa de interés simple es del 5%?

Solución

$2K = K(1 + n5\%)$

$n = 1/5\%$

$n = 20$ años

Descuento Simple

En la práctica comercial es común que se simplifique el cálculo del descuento simple de tal forma que se calcule como:

$$D(t) = M(t)dt$$

Donde d es la tasa de descuento simple por unidad de tiempo. Por lo tanto, se sigue que:

$$D(t) = M(t)\left(1 - a(t)^{-1}\right)$$

Para el caso en que t=1, se observa que utilizando esta función de acumulación, las tasas de interés y de descuento efectivas serán:

$$d_1 = \frac{a(1) - a(0)}{a(1)} = \frac{\frac{1}{1-d} - 1}{\frac{1}{1-d}} = \frac{\frac{1-1+d}{1-d}}{\frac{1}{1-d}} = d$$

$$i_1 = \frac{a(1) - a(0)}{a(0)} = \frac{\frac{1}{1-d} - 1}{1} = \frac{d}{1-d}$$

Descuento Simple

Entonces, observamos que $d_1 = d$ corresponde a la tasa simple de descuento por unidad de tiempo e i la tasa de interés simple por unidad de tiempo correspondiente al descuento bancario simple, obteniendo las siguientes relaciones:

$$i = \frac{d}{1-d} \quad y \quad d = \frac{i}{1+i}$$

Expresando la función acumulación en términos de la tasa de interés bancario simple:

$$a(t) = \frac{1}{1-dt}$$

Por lo tanto $$a(t)^{-1} = 1 - dt$$

Para calcular el Interés, tenemos:

$$I(t) = M(t) - M(0) = M(t) - M(t)(1-dt) = M(t)(dt)$$

Resumen

	Función		Monto	
	Acumulación	Descuento	Interés	Descuento
	$a(t)$	$a(t)^{-1}$	$I(t)$	$D(t)$
Interés Simple	$1+it$	$\frac{1}{1+it}$	$M(0)it$	
Descuento Simple (Bancario)	$\frac{1}{1-dt}$	$1-dt$		$M(t)dt$

Aplicación de Interés Simple

Ejemplo 4

Se invierten \$5,000 al tiempo 0 a una tasa de interés simple del 8% anual.

1. ¿Cuál será el monto que se tendrá después de 3 años?

$$M(3) = K(1+it) = \$5,000\cdot(1+3\cdot 8\%) = \$5,000(1.24) = \boxed{\$6,200}$$

2. ¿Cuál es la tasa de descuento simple anual equivalente a esta tasa?

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{8\%}{1+8\%} = \frac{0.08}{1.08} = 0.074074 \approx \boxed{7.4\%}$$

3. ¿Cuáles son los intereses pagados?

$$I(3) = Kit = \$5,000(8\%)(3) = \boxed{\$1,200}$$

4. ¿Cuál fue el capital invertido al tiempo 0 a una tasa de descuento simple de 9.09% si al final de 3 años se tienen \$6,200?

$$I(0) = M(3)\cdot(1-dt) = \$6,200(1-3\cdot 0.0909) = \boxed{\$4,509.26}$$

5. ¿Cuáles serían los intereses pagados si se aplica una tasa de descuento simple de 7.4% a un monto al tiempo 3 de \$6,200?

$$I(3) = M(3)dt = \$6,200(3\cdot 0.074074) = \boxed{\$1,377.78}$$

Interesés Exacto vs Ordinario

En general, el régimen financiero de interés simple, se aplica a operaciones de corto plazo (menores a 1 año).

Cuando el tiempo se expresa en días, surge la necesidad de poderlo expresar en términos anuales, para lo cual es importante distinguir entre el año solar de 365 (o 366) días y el año comercial de 360 días. Así, se derivan los siguientes tres conceptos:

1. Interés Exacto: Considera el año solar. Entonces para determinar la relación que existe entre el tiempo t, expresado en años y el tiempo g, expresado en días, existe la siguiente relación:

$$t = \frac{g}{365 \text{ o } 366}$$

Interés Exacto vs Ordinario

2. Interés mediante la Regla del Banquero: Considera el año comercial de 360 días. Entonces para determinar la relación que existe entre el tiempo t, expresado en años y el tiempo g, expresado en días, existe la siguiente relación:

$$t = \frac{g}{360}$$

Por lo tanto, si la tasa de interés se expresa en años, el cálculo de los intereses será:

$$I(t) = Ki\,\frac{g}{360}$$

Nota: Para el cálculo de g, se debe recordar que corresponde al número exacto de días entre dos fechas, por lo tanto, se debe incluir el primer día o el último, pero nunca ambos.

Interés Exacto vs Ordinario

3. Interés Ordinario: Considera el año comercial de 360 días; el tiempo expresado en días considera meses de 30 días. Entonces para calcular el número de días se puede utilizar la fórmula:

$$g_{ord} = 360(Y_2 - Y_1) + 30(M_2 - M_1) + (D_2 - D_1)$$

Donde:

Y_i= Año de la fecha i
M_i= Mes de la fecha i
D_i= Día de la fecha i

La relación entre t y g_{ord} es:

$$t = \frac{g_{ord}}{360}$$

Por lo tanto, si la tasa de interés se expresa en años, el cálculo de los intereses será:

$$I(t) = Ki\frac{g_{ord}}{360}$$

Finalmente, si el periodo se expresa en meses, no existe diferencia entre el método empleado y su relación es:

$$t = \frac{m}{12}$$

Interés Exacto vs Ordinario

Ejemplo 5

Una persona invierte $15,000 el 30 de agosto de 2014 a una tasa de interés simple anual del 10%. Determinar el monto al 31 de diciembre de 2014. Utilizar Interés Exacto, Ordinario y regla del banquero.

Solución

$$M(t) = K(1 + it)$$

Con t en años, ya que la tasa es anual.

	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	**TOT**
$g=$	2	30	31	30	30	**123**
$g=$	1	30	31	30	31	**123**

Interés Exacto vs Ordinario

Solución, (*Continuación*)

1. Interés Exacto

$$t=\frac{123}{365}=0.3369$$

$$\Rightarrow M(0.3309)=\$15{,}000(1+[0.1]\cdot[0.3309])=\boxed{\$15{,}505.48}$$

2. Regla del Banquero

$$t=\frac{123}{360}=0.3416$$

$$\Rightarrow M(0.3416)=\$15{,}000(1+[0.1]\cdot[0.3416])=\boxed{\$15{,}512.50}$$

3. Interés Ordinario

$$g_{ord}=(2012-2012)+30(12-8)+(31-30)=121 \quad t=\frac{121}{360}=0.3361$$

$$\Rightarrow M(0.3361)=\$15{,}000(1+[0.1]\cdot[0.3361])=\boxed{\$15{,}504.17}$$

Ejemplo 6

Si se conoce que un capital de $10,000 al 4.72% anual ha producido un monto de $300 por intereses ¿Cuánto tiempo ha estado invertido el capital? Considere el régimen de interés simple.

Solución

$$M(t) = K(1 + it)$$

$$\$10{,}300 = \$10{,}000(1 + 4.72\%t)$$

$$t = \frac{\frac{\$10{,}300}{\$10{,}000} - 1}{4.72\%} = 0.6355$$

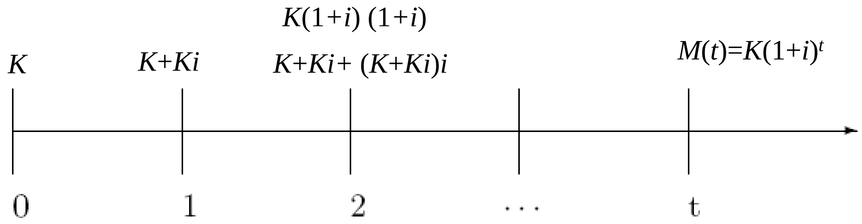
$$t = \frac{g}{360} \Rightarrow g = 360t = \boxed{228 dias}$$

Régimen de Interés Compuesto

Interés Compuesto

Bajo este régimen, los intereses generados son reinvertidos automáticamente al final de cada periodo de capitalización, con la finalidad de obtener nuevos intereses.

El término "compuesto" se refiere al proceso de reinversión para ganar un interés adicional. Bajo este régimen, la inversión del principal y los intereses ganados, se mantienen invertidos en todo momento.



Dado que $M(t)=K(1+i)^t$, se sugiere que la función acumulación es $a(t)=(1+i)^t$

Interés Compuesto

Una vez definida la función acumulación, se puede validar que cumple con las propiedades de la función acumulación.

$$a(t)=(1+i)^t$$

Propiedades de la Función Acumulación:

1. $a(t)$ está definida para toda $t>=0$.
2. $a(0) = (1+i)^0=1$
3. $a'(t)=\ln(1+i)\,(1+i)^t$ es no-decreciente.
4. $a(t)=e^{t\ln(1+i)}$ es continua.
5. $\frac{a(t_2)}{a(t_1)}=\frac{(1+i)^{t_2}}{(1+i)^{t_1}}=(1+i)^{t_2-t_1}$ por lo tanto, es consistente.

Interés Compuesto

Se puede demostrar que la tasa de interés efectiva por periodo es constante en todos los periodos si y sólo si se maneja un régimen de interés compuesto.

Demostración por Inducción

$\Rightarrow$ Para $n=1$

$$i_1 = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = \frac{a(0)(1+i)-a(0)}{a(0)} = 1+i-1 = i$$

Suponemos válido para n y probamos para $(n+1)$

$$i_{n+1} = \frac{a(n+1)-a(n)}{a(n)} = \frac{a(n)(1+i)-a(n)}{a(n)} = 1+i-1 = i$$

$\Leftarrow$ Sea $a(t) = (1+i)^t$

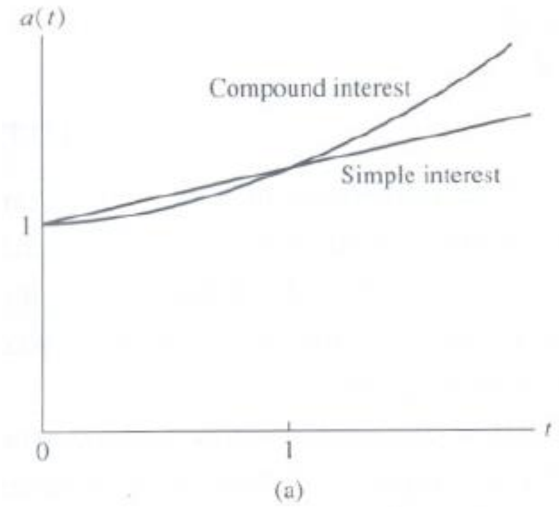
$$i_n = \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1+i)^n-(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = 1+i-1 = i$$

No depende de *n*.

$\therefore$ Función acumulación es: $a(n) = \prod_{j=i}^{n}(1+i_j) = \prod_{j=i}^{n}(1+i) = (1+i)^n$

Simple vs Compuesto

Si graficamos la función de acumulación bajo el régimen de interés simple y bajo el régimen de interés compuesto, obtenemos:



Es claro entonces, por qué en periodos de corto tiempo se utiliza el régimen de interés simple y para largo plazo el interés compuesto.

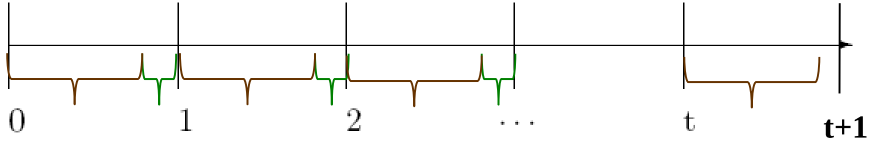
Simple vs Compuesto

Con base en lo anterior, en la práctica se observa que para periodos fraccionarios de tiempo se paga una tasa de interés simple, mientras para los periodos enteros la tasa de interés es compuesta.

Sea r, $0<r<1$ correspondiente a la fracción de año que constituye el periodo final, entonces

$$(1+i)^{t+k} \approx (1-k)(1+i)^{t} + k(1+i)^{t+1}$$

Es decir si k=11/12 de año, tenemos:



$(1\text{-}k)(1+i)^{t}$

$(k)(1+i)^{t+1}$

Simple vs Compuesto

Entonces, retomando. Sea r, $0<r<1$ correspondiente a la fracción de año que constituye el periodo final, entonces

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{n+r} &\approx (1-r)(1+i)^n + r(1+i)^{n+1} \\
&= (1+i)^n\left[(1-r)+r(1+i)\right] \\
&= (1+i)^n\left[1-r+r+ri\right] \\
&= (1+i)^n(1+ri)
\end{aligned}
$$

Interés Compuesto por "n" periodos enteros

Interés Simple por la fracción "r" de periodo.

Simple vs Compuesto

Ejemplo 7

Calcular el valor acumulado de $50,000 al final de 2 años 3 meses a una tasa de 7% semestral bajo los siguientes esquemas:

1. Se asume interés simple durante todo el periodo

$$\$50,000\left(1+\left(2\left(2+\frac{3}{12}\right)\right)(7\%)\right)=\boxed{\$65,750}$$

2. Se asume interés compuesto durante todo el periodo

$$\$50,000(1+(7\%))^{2\left(2+\frac{3}{12}\right)}=\boxed{\$67,794.90}$$

3. Se asume interés compuesto para los años enteros e interés simple durante los periodo fraccionarios.

$$\$50,000(1+(7\%))^{2(2)}\left(1+\left(\frac{7\%}{2}\right)\right)=\boxed{\$67,833.69}$$

Descuento Compuesto

Como se demostró con anterioridad, bajo el régimen de interés compuesto, la tasa de interés efectiva es constante. Entonces, si buscamos una tasa de descuento, nos gustaría que la tasa de descuento efectiva por periodo sea constante.

Sea d la tasa de descuento efectiva por periodo entonces:

$$d_1=\frac{a(1)-a(0)}{a(1)}=1-\frac{a(0)}{a(1)}=1-\frac{1}{a(1)}=d\Rightarrow a(1)=\frac{1}{1-d}$$

$$d_2=\frac{a(2)-a(1)}{a(2)}=1-\frac{a(1)}{a(2)}=d\Rightarrow a(2)=\frac{a(1)}{1-d}=\frac{\frac{1}{1-d}}{1-d}=\frac{1}{(1-d)^2}$$

Supongamos que $a(n-1)=\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=1-\frac{a(n-1)}{a(n)}=d\Rightarrow a(n)=\frac{a(n-1)}{1-d}=\frac{\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n-1}}{1-d}=\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n}$$

Descuento Compuesto

De lo anterior, podemos observar que $a(t)=(1-d)^{-t}$ y $a(t)^{-1}=(1-d)$ son las tasas de acumulación y de descuento respectivamente.

Considerando que la función acumulación utilizando tasa de descuento efectivo y utilizando una tasa de interés efectiva deben ser iguales bajo el régimen de descuento compuesto, tenemos:

$$d_1=\frac{a(1)-a(0)}{a(1)}=1-\frac{a(0)}{a(1)}=1-\frac{1}{a(1)}=d\Rightarrow a(1)=\frac{1}{1-d}$$

$$a(t)=(1-d)^{-t}=(1+i)^{t}\Rightarrow\frac{1}{1-d}=1+i\Rightarrow d=\frac{i}{1+i}\ e\ i=\frac{d}{1-d}$$

Con esto, se ha encontrado la relación entre la tasa de interés compuesto y la tasa de descuento compuesto, para cualquier periodo de tiempo, ya que ambas tasas son efectivas y constantes en el tiempo.

Descuento Compuesto

De igual forma que se hizo con anterioridad para tasas de interés, se puede aproximar el descuento compuesto con descuento compuesto para periodos enteros y con descuento simple para periodos fraccionarios, entonces tenemos:

$$\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n+r} \approx (1-r)\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n} + r\left(\frac{1}{1-d}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{1-d}\right)^{n}\left[(1-r)+r\left(\frac{1}{1-d}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1-d}\right)^{n}\left[\frac{(1-r)(1-d)+r}{1-d}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1-d}\right)^{n}\left(\frac{1+(r-1)d}{1-d}\right)$$

Descuento Compuesto por "n" periodos enteros

Descuento Simple por la fracción "r" de periodo.

Capitalización en el Tiempo

¿Cómo se comportan los intereses cuando varía el periodo sobre el cual se define la tasa de interés?

Ejemplo 8

Se invierten \$1,000 durante 5 años. Utilizando el régimen de interés simple ¿Cuál será el monto al final de los 5 años si:

1. Los periodos son anuales y la tasa de interés es 12% anual?

$$M(5) = \$1{,}000(1 + (5)(12\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

2. Los periodos son semestrales y la tasa de interés es 6% semestral?

$$M(10) = \$1{,}000(1 + (10)(6\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

3. Los periodos son trimestrales y la tasa de interés es 3% trimestral?

$$M(20) = \$1{,}000(1 + (20)(3\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

4. Los periodos son mensuales y la tasa de interés es 1% mensual?

$$M(60) = \$1{,}000(1 + (60)(1\%)) = \boxed{\$1{,}600}$$

Capitalización en el Tiempo

Ejemplo 9

Se invierten $1,000 durante 5 años. Utilizando el régimen de interés compuesto ¿Cuál será el monto al final de los 5 años si:

1. Los periodos son anuales y la tasa de interés es 12% anual?

$$M(5) = \$1{,}000(1+(12\%))^{5} = \boxed{\$1{,}762.34}$$

2. Los periodos son semestrales y la tasa de interés es 6% semestral?

$$M(10) = \$1{,}000(1+(6\%))^{10} = \boxed{\$1{,}790.84}$$

3. Los periodos son trimestrales y la tasa de interés es 3% trimestral?

$$M(20) = \$1{,}000(1+(3\%))^{20} = \boxed{\$1{,}806.11}$$

4. Los periodos son mensuales y la tasa de interés es 1% mensual?

$$M(60) = \$1{,}000(1+(1\%))^{60} = \boxed{\$1{,}816.69}$$

Tasa Nominal de Interés

Como se puede observar a partir de los ejemplos anteriores, bajo el régimen de Interés Simple, no existe diferencia alguna, mientras que bajo el régimen de Interés Compuesto, los intereses aumentan conforme el periodo de capitalización disminuye.

También, podemos notar que la variable del tiempo, está expresada en periodos relativos partiendo de la definición de la tasa de interés *i.e.* tasa mensual, periodos mensuales

A partir de esto, podemos detectar que surge la necesidad de definir una tasa de interés que especifique el periodo de capitalización en el régimen de interés compuesto, a la cual denominaremos Tasa Nominal de Interés.

Tasa Nominal de Interés

Generalmente, la tasa de interés se establece como la tasa efectiva por periodo. Por interés al 10% anual, se entiende que la tasa efectiva de interés al año es de 10%, *i.e.* que el periodo de capitalización es de un año.

Si el periodo de capitalización no es anual, entonces se debe indicar expresamente la frecuencia de conversión *e.g.* interés al 8% anual convertible trimestral, indica que el tiempo está medido en años y que su periodo de capitalización es cada tres meses, por lo tanto la tasa de interés efectiva por trimestre es 2%

En conclusión, la Tasa de Interés Nominal, **NO** sirve para calcular los intereses (exceptuando el caso en que el periodo de capitalización sea igual al periodo de medición del tiempo). Para calcular intereses, necesitamos Tasa Efectiva de Interés.

Tasa Nominal de Interés

Notación

Se denota como $i^{(m)}$ a la tasa nominal anual convertible m veces al año, es decir, existen m periodos de capitalización en un año. Por ejemplo para el caso trimestral, se convierte 4 veces al año, para el caso semestral, 2 veces, etc.

La tasa nominal convertible m veces al año $i^{(m)}$, tiene dos implicaciones:

1. Existen m periodos de capitalización en un año.
2. $\frac{i^{(m)}}{m}$ es la tasa efectiva por *m-ésimo* de año.

Por lo tanto, la función acumulación será:

$$a(t) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$$

Tasa Nominal de Interés

Ejemplo 10

¿Cuál será el monto que producirá una inversión de $10,000 después de 3 años a una tasa del 4% anual convertible mensualmente?

Solución

$$M(36) = \$10{,}000\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{12\cdot 3}$$

$$= \$10{,}000(1 + .0033)^{36}$$

$$\boxed{= \$11{,}272.72}$$

Tasas Equivalentes

Decimos que dos tasas anuales de interés con diferentes periodos de conversión, son equivalentes si producen el mismo interés compuesto al final del mismo periodo.

Ejemplo 18

¿Cuánto será el Valor Futuro al final de un año de \$20,000 que se invierten en $t=0$?

1. Si se invierten al 5% anual convertible trimestralmente

$$M(4)=\$20{,}000\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^4\boxed{=\$21{,}018.91}$$

2. Si se invierten al 5.094534% efectivo anual.

$$M(1)=\$20{,}000(1+0.05094534)\boxed{=\$21{,}018.91}$$

Por lo tanto, las tasas del 5% anual convertible trimestralmente y 5.094534% efectivo anual, son equivalentes.

¡Gracias!

Asociación Mexicana de Inversionistas

Fernando J. MARTINEZ EISSA

W:55 2128 2207
M: fereissa@gmail.com

Interés Simple

Bajo el supuesto de Interés Simple, el monto de intereses ganados por la inversión inicial sobre $t+h$ periodos es igual al monto de los intereses ganados en t periodos mas el monto de los intereses ganados en h periodos menos 1. Es decir:

$$a(t+h) = a(t) + a(h) - 1 \quad con \quad t, h \geq 0$$

Supongamos que $a(t)$ es diferenciable, entonces:

$$\begin{aligned}
a'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[a(t) + a(h) - 1] - a(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(h) - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a(h) - a(0)}{h} = a'(0), \text{constante}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore a'(t) = a'(0)}$$

Interés Simple

A partir del resultado anterior y reemplazando t por r, tenemos:

$$a'(r) = a'(0)$$

Integrando ambos lados en el intervalo $[0,t]$, tenemos:

$$\int_0^t a'(r)dr = \int_0^t a'(0)dr$$

$$a(r)\Big|_0^t = \left[r \cdot a'(0)\right]_0^t$$

$$a(t) - a(0) = t \cdot a'(0)$$

$$a(t) = 1 + t \cdot a'(0)$$

Si $t=1$ y recordando que $a(1)=1+i$, tenemos que $a'(0)=i$

$$\boxed{\therefore a(t) = 1 + ti, \text{ con } \quad t \geq 0}$$

Nótese que la t no tiene que ser entera.